Physique générale : quantique, Corrigé 3

Assistants et tuteurs :

elena.acinapura@epfl.ch
sara.alvesdossantos@epfl.ch
felice.bordereau@epfl.ch
jeanne.bourgeois@epfl.ch
sofia.brizigotti@epfl.ch
thomas.chetaille@epfl.ch
marco.dimambro@epfl.ch
leo.goutte@epfl.ch
douaa.salah@epfl.ch
arianna.vigano@epfl.ch

Exercice 1 : Diffusion Compton

Notons l'énergie, respectivement la quantité de mouvement, du photon par E_1 et $\vec{p}_1$. De manière analogue, l'électron est décrit par E_2 et $\vec{p}_2$. Après la diffusion du photon par l'électron ces quantités sont notées : E_1', E_2', $\vec{p}_1^{\,'}$ et $\vec{p}_2^{\,'}$.

La conservation de l'énergie et de la quantité de mouvement s'écrivent alors

$$
\begin{aligned}
E_1 + E_2 &= E_1' + E_2' \\
\vec{p}_1 + \vec{p}_2 &= \vec{p}_1^{\,'} + \vec{p}_2^{\,'}
\end{aligned}
$$

où $E_1 = |\vec{p}_1|c = h\nu$ et $E_2 = \sqrt{|\vec{p}_2|^2c^2 + m_e^2c^4} = m_ec^2$. Après la diffusion, on a de même $E_1' = |\vec{p}_1^{\,'}|c = h\nu'$ et $E_2' = \sqrt{|\vec{p}_2^{\,'}|^2c^2 + m_e^2c^4}$.

La conservation de l'énergie s'écrit donc :

$$
h(\nu - \nu') + m_ec^2 = \sqrt{|\vec{p}_2^{\,'}|^2c^2 + m_e^2c^4} \tag{1}
$$

La conservation de la quantité de mouvement projetée sur $\hat{e}_x$ et $\hat{e}_y$ donne :

$$
\begin{aligned}
\frac{h\nu}{c} &= \frac{h\nu'}{c}\cos\theta + |\vec{p}_2^{\,'}|\cos\psi \\
0 &= \frac{h\nu'}{c}\sin\theta - |\vec{p}_2^{\,'}|\sin\psi
\end{aligned} \tag{2}
$$

De ces deux dernières équations, on tire aisément $|\vec{p}_2^{\,'}|^2$:

$$
|\vec{p}_2^{\,'}|^2 = \left(\frac{h\nu}{c} - \frac{h\nu'}{c}\cos\theta\right)^2 + \left(\frac{h\nu'}{c}\right)^2\sin^2\theta \tag{3}
$$

En égalant avec la valeur de $|\vec{p}_2^{\,'}|^2$ trouvée par conservation de l'énergie on trouve sans difficulté

$$
\lambda' - \lambda = \frac{h}{m_ec}(1 - \cos\theta) \tag{4}
$$

On trouve bien que si $\theta = 0$, la fréquence n'est pas modifiée et $\vec{p}_2' = \vec{p}_2$. En effet, le photon n'intéragissant pas avec l'électron, il n'y a aucune raison que son énergie soit modifiée !

Exercice 2 : Evaporation d'une goutte d'eau

En utilisant la loi de Stefan-Boltzmann nous avons pour l'énergie émise et absorbée par unité de temps (la puissance) :

$$P_e = A\sigma T_1^4 = 0.14\ mW, P_a = A\sigma T_2^4 = 0.19\ mW \tag{5}$$

dont l'excès de puissance vaut :

$$\Delta P = A\sigma(T_2^4 - T_1^4) \tag{6}$$

Ici, $A = 4\pi R^2$ est la surface de la goutte. Nous avons donc le bilan énergétique suivant : l'excès de puissance sera égal à la puissance nécessaire pour évaporer l'eau. Pendant un intervalle de temps dt la masse dm s'évapore et donc (voir l'énoncé) :

$$4\pi R^2\sigma(T_2^4 - T_1^4)dt = -Cdm \tag{7}$$

où dm est la masse d'eau évaporée pendant le temps dt. Pour établir l'équation différentielle afin de calculer le rayon de la goutte en fonction du temps, il faut exprimer dm en fonction de R :

$$dm = 4\pi R(t)^2\rho dR \tag{8}$$

où ρ est la masse volumique de l'eau ((si cela n'est pas claire, écrivez $m = \frac{4}{3}\pi R^3\rho$ et trouver la différentielle), donc :

$$\begin{aligned}
&4\pi R(t)^2\sigma\left(T_2^4 - T_1^4\right)dt = -4\pi R(t)^2 C\rho dR \\
&\Rightarrow \sigma\left(T_2^4 - T_1^4\right)dt = -C\rho dR \\
&\Rightarrow dR/dt = -\frac{\sigma\left(T_2^4 - T_1^4\right)}{C\rho} = \text{ const}
\end{aligned}$$

et finalement $R(t) = R_0 - \frac{\sigma\left(T_2^4 - T_1^4\right)}{C\rho}t$. Le temps d'évaporation total est trouvé en mettant la condition $R(t_{ev}) = 0$ et vaut

$$t_{ev} = \frac{R_0 C\rho}{\sigma\left(T_2^4 - T_1^4\right)} = 566\ s = 9\,\text{min}\,26\ s \tag{9}$$

Exercice 3 : Effet photoélectrique

L'énergie du photon vaut $E_{ph} = \frac{hc}{\lambda} = 7.47 \cdot 10^{-19}\ J = 4.67$ eV.
Selon la loi d'Einstein pour l'effet photoélectrique, l'énergie cinétique maximale d'un électron émis vaut :

$$E_{c.\max} = E_{ph} - \Phi = 0.59 \text{ eV} \tag{10}$$

Quand la différence des potentiels entre les électrodes du condensateur atteint la valeur $V_{\max} = E_{c.\max}/e = 0.59$ V l'émission d'électrons devient impossible car ils n'acquièrent plus une énergie suffisante pour s'échapper de l'électrode e de son potentiel électrique attractif. Le principe de conservation d'énergie nous donne que :

$$E_{c.e}(t) + \Phi + eV(t) = E_{ph} \tag{11}$$

où $eV(t)$ est l'énergie potentielle de l'électron. Lorsque $eV(t) = eV_{max} = E_{c.max}$, nous obtenons $E_{c.e} = 0$ et l'électron ne peut plus atteindre l'autre plaque du condensateur. En utilisant les formules pour la capacité du condensateur plan $C = \frac{\epsilon_0 S}{d}$, et sa charge $Q = CV$, nous obtenons $Q_{max} = 4.1 \cdot 10^6$ électrons. Chaque pulse du laser porte une énergie qui vaut : $E_{pulse} = \frac{P}{f} = 2 \cdot 10^{-12}$ J donc il y aura un nombre de photon dans chaque pulse égal à :

$$\frac{E_{pulse}}{E_{ph}} = 2.7 \cdot 10^6 \tag{12}$$

Un pulse va donc générer un nombre d'électrons égal à

$$N_{\text{el}} = \eta \frac{E_{pulse}}{E_{ph}} = 540 \text{ électrons} \tag{13}$$

Donc il faut avoir $Q_{max}/N_{\text{el}} = 7600$ impulsions du laser pour créer la charge maximale.

Exercice 4 : Effet Compton 1

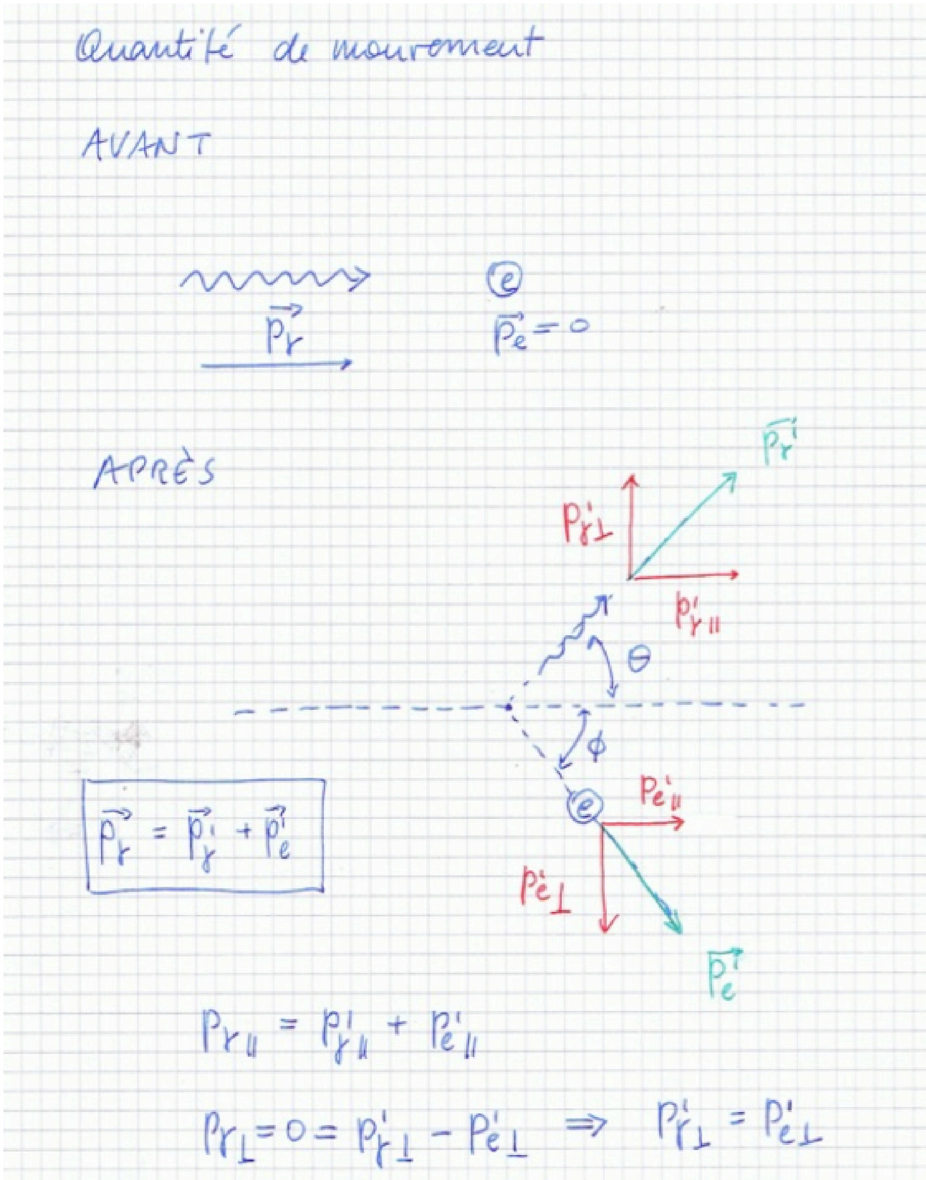
Pour commencer, il faut noter que la vitesse de l'électrons vaut « seulement » 1/10 de la vitesse de la lumière. Ainsi pour calculer l'énergie et la quantité de mouvement de l'électron nous pouvons utiliser les expressions non-relativistes $E_{el} = \frac{mv^2}{2}$ et $P_{el} = mv$, même si la précision de cette approximation n'est pas énorme (voir plus bas). Selon la loi de la conservation de l'énergie $E_{ph} - E_{ph}^{'} = mv^2/2$ donc $E_{ph}^{'} = E_{ph} - mv^2/2 = \frac{hc}{\lambda} - mv^2/2 = 7.55 \cdot 10^{-15}$ J. Ceci correspond à une longueur d'onde $\lambda^{'} = \frac{hc}{E^{'}} = 2.63 \cdot 10^{-11}$ m. En utilisant la formule de Compton $\lambda^{'} - \lambda = \frac{h}{mc}(1 - \cos\vartheta) = \frac{2h}{mc}\sin^2\frac{\vartheta}{2}$ nous obtenons $\sin^2\frac{\vartheta}{2} = \frac{mc}{2h}\left(\lambda^{'} - \lambda\right)$. L'application numérique donne $\sin\frac{\vartheta}{2} = 0.517$ et donc $\vartheta = 62°$.

La direction de la vitesse d'un électron après son interaction avec un photon peut être trouvée en utilisant la loi de conservation de la quantité de mouvement totale du système. Cette expression est une fonction vectorielle, il faut ainsi décomposer la quantité de mouvement selon le système de coordonnée choisi. De plus, et même si le photon n'a pas de masse, il possède une quantité de mouvement liée à son énergie par la relation $p = \frac{E}{c} = \frac{h}{\lambda}$. La conservation de la quantité de mouvement prescrit :

$$\vec{p_\gamma} = \vec{p_\gamma}^{'} + \vec{p_e}^{'} \tag{14}$$

Ici, la projection de la quantité de mouvement du photon sur l'axe perpendiculaire à la direction de sa propagation initiale après l'interaction vaut :

$$p_{\gamma\perp}^{'} = \left|\vec{p_\gamma}^{'}\right| \sin\vartheta = \frac{E_\gamma^{'}}{c}\sin\vartheta \tag{15}$$



tandis que la quantité de mouvement de l'électron selon cette même direction vaut :

$$p'_{e\perp} = -p'_{\gamma\perp} = \frac{E'_\gamma}{c}\sin\vartheta \tag{16}$$

Similairement, pour la composante de la quantité de mouvement de l'électron parallèle à la direction de propagation on obtient :

$$\begin{gathered} p'_{e\parallel} = p_{\gamma\parallel} - p'_{\gamma\parallel} \\ p'_{e\parallel} = \tfrac{E_\gamma}{c} - \tfrac{E'_\gamma}{c}\cos\vartheta \end{gathered} \tag{17}$$

et la tangente de l'angle ϕ vaut :

$$\tan\phi = \frac{p'_{e\perp}}{p'_{e\parallel}} = \frac{\frac{E'_\gamma}{c}\sin\vartheta}{\frac{E_\gamma}{c} - \frac{E'_\gamma}{c}\cos\vartheta} = \frac{E'_\gamma\sin\vartheta}{E_\gamma - E'_\gamma\cos\vartheta} \tag{18}$$

ce qui nous donne $\phi = 56°$.
Une autre possibilité est de partir l'égalité $p'_{e\perp} = p'_{\gamma\perp}$ et de se baser sur le fait qu'on connaît la vitesse de l'électron après la collision et donc aussi sa quantité de mouvement. On trouve $p'_{e\perp} = \left|\vec{p}'_e\right| \sin(\phi)$ avec $\left|\vec{p}'_e\right| = \gamma m v$, avec $\gamma = (1 - v^2/c^2)^{-1/2}$. Donc

$$\sin(\varphi) = \frac{E'_\gamma}{\left|\vec{p}'_e\right| c} \sin\vartheta = \frac{E'_\gamma}{mv \cdot c} \sin\vartheta$$
$$\varphi = 54.5°$$

Il y a une petite différence entre ce résultat et celui de plus haut du probablement que la formule plus en haut est numériquement affectée par une erreur. Ici nous avons utilisé l'expression relativiste pour la quantité de mouvement des électrons et donc cette formule est juste même pour les électrons relativistes.
Le même angle peut être calculé en trouvant, par exemple, la vitesse de l'électron selon la direction perpendiculaire à la direction de propagation initiale du photon comme $v_\perp = -\frac{P'}{m} = -\frac{E'}{mc} \sin\vartheta = -2.25 \cdot 10^7$ m/s et en utilisant la formule $\varphi = \arcsin \frac{v_\perp}{v}$. Ceci nous donne $\varphi = 48^0$. De façon analogue, pour la vitesse $v_\parallel$ nous obtenons $v_\parallel = \frac{P}{m} - \frac{P' \cos\vartheta}{m}$, $\phi = \arccos \frac{v_\parallel}{v} = 65°$. La différence ici est due à l'utilisation de l'expression non-relativiste pour la quantité de mouvement de l'électron. Nous considérons toutefois toutes ces solutions comme justes.

Exercice 5 : Effet Compton 2

1. A partir du schéma ci-contre, nous pouvons constater que : 1) avant la collision le vecteur de la quantité de mouvement du photon n'a pas de composantes perpendiculaires à la direction de propagation duphoton ; 2) après la collision et dû au fait que $\vec{p}'_{ph} = -\frac{1}{3}\vec{p}'_e$ (la quantité de mouvement du photon est plus petite que la quantité de mouvement de l'électron), il ne peut pas y avoir de composantes perpendiculaires à la direction de propagation du photon incident autrement il n'y aurait pas de conservation de la quantité de mouvement !
On peut donc conclure que $\theta = 180°$ La condition de conservation de la quantité de mouvement est :

$$\vec{p}_{ph} = \vec{p}'_{ph} + \vec{p}'_e = \vec{p}'_{ph} - 3\vec{p}'_{ph} = -2p'_{ph} \tag{19}$$

En connaissant la relation entre la quantité de mouvement du photon et sa longueur d'onde $|\vec{p}_{ph}| = \frac{h}{\lambda}$, nous pouvons insérer ça dans l'équation (19) et écrire :

$$|\vec{p}_{ph}| = 2\left|p'_{ph}\right| \rightarrow \frac{h}{\lambda} = 2\frac{h}{\lambda'} \rightarrow \lambda' = 2\lambda \tag{20}$$

L'équation pour l'effet Compton est :

$$\lambda' - \lambda = \frac{2h}{mc} \sin^2 \frac{180°}{2} = \frac{2h}{mc}$$

tout simplement avec $\lambda' = 2\lambda$, nous obtenons $\lambda = \frac{2h}{mc} = 4.86 \cdot 10^{-12}$ m, $\lambda' = 2\lambda = 9.72 \cdot 10^{-12}$ m
2. La longueur d'onde de de-Broglie de l'électron vaut :

$$\lambda'_e = \frac{h}{p'_e}$$

Mais $\left|p_e^{'}\right| = 3\left|p_{ph}^{'}\right|$ selon la donnée du problème, on obtient :

$$\left|p_e^{'}\right| = 3\left|p_{ph}^{'}\right| = 3\frac{h}{\lambda^{'}} \to \lambda_e^{'} = \frac{\lambda^{'}}{3} = 3.24 \cdot 10^{-12} \text{ m}$$

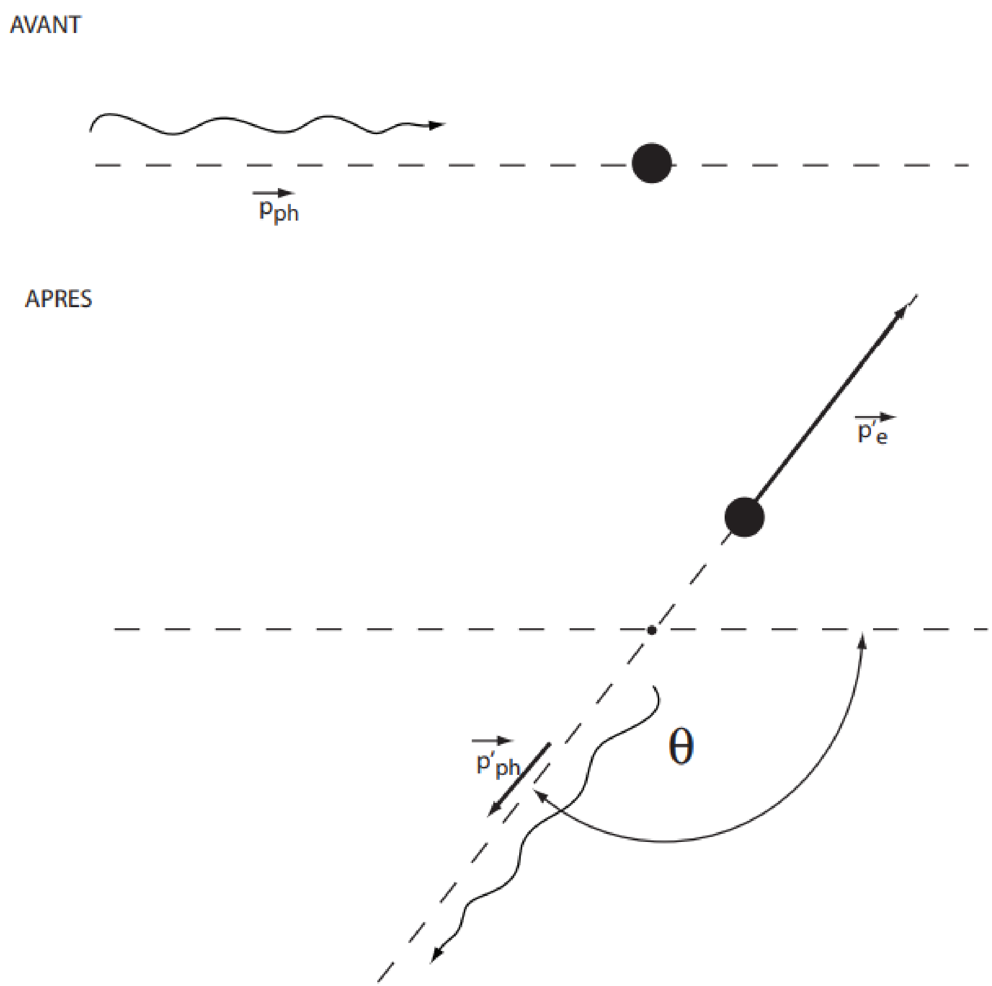


FIGURE 1